УДК 517.97

ОБРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ ОПТИМИЗАЦИИ

С.М.ЗЕЙНАЛЛЫ

Гянджинский Государственный Университет

zeynallısubhiya@yahoo.com

Обратные задачи для дифференциальных уравнений заключаются в поиске коэффициентов рассматриваемых уравнений или коэффициентов краевых условий при наличии дополнительных информаций. Такие задачи возникают в областях геофизики, сейсмологии, гидродинамики и т.д., поэтому исследование таких задач является актуальной задачей современной математики.

Ключевые слова: обратная граничная задача, условие оптимальности, сопряжённая задача, градиент функционала.

В настоящей работе рассматривается обратная граничная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка и поиск неизвестной граничной функции приводится к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительного данного, получается градиент функционала и предлагается численный алгоритм для нахождения неизвестной граничной функции.

1. Постановка задачи. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0,\ (x,t) \in Q_T\,, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ x \in \Omega\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\bigg|_{S_T^1} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\bigg|_{S_T^2} = v(s,t), (s,t) \in S_T^2\,, \tag{3}$$

где Ω - ограниченная область в R^n $(n \geq 2)$ с гладкой границей Γ, $S_T = \Gamma \times (0,T)$ - боковая поверхность цилиндра Q_T, $S_T = S_T^1 \cup S_T^2$, $S_T^1 = \Gamma_1 \times (0,T)$, $S_T^2 = \Gamma_2 \times (0,T)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $mes\, S_T^i > 0$, $i = 1,2$,

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

причем $a_{ij}(x)$ заданные функции из $C^1(\overline{\Omega})$, $\forall \xi \in R^n$ и для всех $x \in \overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha = const > 0,\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ i, j = 1,...,n,$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)$ - конормальная производная, а ν-внешняя нормаль к границе Γ области Ω, $T > 0$ - заданное постоянное.

В (3) $v(s,t)$ - неизвестная граничная функция. Для определения неизвестной функции $v(s,t)$ имеется дополнительная информация (условие переопределения)

$$u\big|_{S_T^1} = a(s,t), \quad (s,t) \in S_T^1, \tag{4}$$

где $a(s,t) \in L_2(S_T^1)$ - заданная функция. Мы сводим эту задачу к постановке задачи минимизации функционала, т.е. на решениях задачи (1)-(3) минимизируем функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{S_T^1} [u(s,t;v) - a(s,t)]^2\, dsdt, \tag{5}$$

где $u(x,t;v)$ - является решением задачи (1)-(3), которое соответствует функции $v(s,t)$. Предполагается, что $v(s,t) \in L_2(S_T^2)$.

Предположим, что при каждой фиксированной функции $v(s,t)$ краевая задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ [7].

Если мы найдем функцию $v(s,t)$, которая доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительная информация (4) выполняется.

2. О решении задачи минимизации функционала (5), при условиях (1)-(3).

Теорема 1. В задаче оптимального управления (5), (1)-(3)

$$\inf_{v \in L_2(S_T^2)} J(v) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Вопрос (6) эквивалентен вопросу о плотности в $L_2(S_T^1)$ образа $L_2(S_T^2)$ при отображении

$$v(s,t) \to u(s,t;v). \tag{7}$$

Для решения этой задачи применим теорему Хана-Банаха. Пусть $\psi(s,t)$ - заданная функция из $L_2(S_T^1)$, такая, что она ортогональна к образу $L_2(S_T^1)$ при отображении (7), т.е.

$$\int_{S_T^1} u(s,t;v)\psi(s,t)dsdt = 0 \quad \forall v \in L_2(S_T^2). \tag{8}$$

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать, что $\psi(s,t)=0$, $(s,t)\in S_T^1$.

Пусть функция $W(x,t)$ из $W_2^1(Q_T)$ является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + AW = 0, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{9}$$

$$W\big|_{t=T} = 0, \ \frac{\partial W}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \quad x\in\Omega, \tag{10}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \nu_A}\bigg|_{S_T^1} = \psi(s,t), \quad (s,t)\in S_T^1, \ \frac{\partial W}{\partial \nu_A}\bigg|_{S_T^2} = 0. \tag{11}$$

Поскольку $u(x,t;v)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3) из $W_2^1(Q_T)$, для произвольной функции $g(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $g(x,T)=0$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)dxdt - \int_{S_T^2} vgdsdt = 0. \tag{12}$$

А для обобщенного решения $W(x,t)$ задачи (9)-(11) выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T}\left(-\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial W}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)dxdt - \int_{S_T^1} \psi\,\eta\, dsdt = 0 \tag{13}$$

для произвольной функции $\eta(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,0)=0$. Если в формуле (12) за функцию $g(x,t)$ взять $W(x,t)$, в формуле (13) за функцию $\eta(x,t)$ взять $u(x,t)$, из (12) вычесть (13), имеем

$$-\int_{S_T^2} v(s,t)W(s,t)dsdt + \int_{S_T^1}\psi(s,t)u(s,t;v)dsdt = 0.$$

Отсюда, в силу (8), получим

$$\int_{S_T^2} v(s,t)W(s,t)dsdt = 0 \quad \forall v\in L_2(S_T^2).$$

Следовательно,

$$W(s,t) = 0 \text{ почти всюду в } S_T^2. \tag{14}$$

Пусть множество $S_T^2 \subset S_T$ есть множество единственности [8] в задаче (9)-(11). Тогда из соотношения (9), второго условия (11) и (14) следует, что $W(x,t)=0$ почти всюду в Q_T. Поэтому, в силу первого условия (11), $\psi(s,t)=0$ почти всюду в S_T^1. Таким образом, мы получаем, что если функция $v(s,t)$ пробегает пространство $L_2(S_T^2)$, то наблюдение $u(s,t;v)$ заметает подпространство, плотное в пространстве $L_2(S_T^1)$ (см. [9]). Поэтому

$$\inf_{v \in L_2(S_T^2)} J(v) = 0 .$$

Теорема доказана.

Отметим, что если образ $L_2(S_T^2)$ при отображении (7) замкнут в $L_2(S_T^1)$, то возможно получить, что существует такой элемент $\bar{v} \in L_2(S_T^2)$, что

$$J(\bar{v}) = \inf_{v \in L_2(S_T^2)} J(v) = 0 .$$

В силу линейности краевой задачи (1)-(3) имеем равенство

$$u(x,t;\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) = \lambda u(x,t;v_1) + (1-\lambda)u(x,t;v_2),\ (x,t) \in Q_T ,$$

справедливое при всех $v_1, v_2 \in L_2(S_T^2)$ и всех действительных λ. Отсюда следует выпуклость функционала (5). Поскольку класс функций, в котором ищется $v(s,t)$, есть $L_2(S_T^2)$, в силу теоремы из [10], стр. 28 справедлива

Теорема 2. Для того, чтобы $\bar{v} \in L_2(S_T^2)$ минимизировала функционал (5) при условиях (1)-(3), необходимо и достаточно, что

$$J'(\bar{v}) = 0 . \tag{15}$$

Если вычислить дифференциал функционала (5) в точке $\bar{v}(s,t)$, имеем

$$J'(\bar{v})(v-\bar{v}) = \int_{S_T^1} [u(s,t;\bar{v}) - a(s,t)] u_v(s,t;\bar{v})(v(s,t) - \bar{v}(s,t)) ds dt = 0,\ \forall v \in L_2(S_T^2), \tag{16}$$

где $u_v(x,t;\bar{v})$ - производная решения задачи (1)-(3) по v. Вычислим эту производную. Для этого линейную краевую задачу (1)-(3) запишем в виде операторного уравнения

$$Bu = v ,$$

где B есть неограниченный линейный оператор в пространстве $L_2(Q_T)$, сопоставляющий каждой функции $u(x,t)$ из области своего определения $D(B)$ элемент $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|_{S_T^2}$ пространства $L_2(S_T^2)$. В качестве $D(B)$ возьмем совокупность элементов $W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющих условиям

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0$, $\quad u\big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_{S_T^1} = 0$. Тогда как в [7] можно показать, что оператор B допускает замыкание $\overline{B}$, оператор $\overline{B}$ имеет обратный и множество значений оператора $\overline{B}$ совпадает со всем $L_2(S_T^2)$. Поэтому функция $u = \overline{B}^{-1}v$ будет обобщенным решением задачи (1)-(3). Тогда

$$u_v(s,t;\overline{v})(-\overline{v}) = u(s,t;v) - u(s,t;\overline{v}).$$

Поэтому соотношение (16) принимает вид

$$J'(\overline{v})(v-\overline{v}) \equiv \int_{S_T^1} [u(s,t;\overline{v}) - a(s,t)][u(s,t;\overline{v}) - u(s,t;\overline{v})]dsdt = 0, \ \forall v \in L_2(S_T^2). \quad (17)$$

3. Условие оптимальности. Введем следующую сопряженную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + Ap = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \quad (18)$$

$$p\big|_{t=T} = 0, \ \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0, \qquad x \in \Omega, \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_A}\Big|_{S_T^1} = u(s,t;v) - a(s,t), \quad (s,t) \in S_T^1, \ \frac{\partial p}{\partial \nu_A}\Big|_{S_T^2} = 0. \quad (20)$$

Предположим, что краевая задача (18)-(20) имеет единственное обобщенное решение $p(x,t;v)$ из $W_2^1(Q_T)$.

С помощью решения краевой задачи (18)-(20) преобразуем левую часть соотношения (17).

Если обозначить $\tilde{u}(x,t) = u(x,t;v) - u(x,t;\overline{v})$, то ясно, что $\tilde{u}$ является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + A\tilde{u} = 0, \ (x,t) \in Q_T,$$

$$\tilde{u}\big|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \ x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_A}\Big|_{S_T^1} = 0, \ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_A}\Big|_{S_T^2} = v(s,t) - \overline{v}(s,t), \ (s,t) \in S_T^2,$$

т.е. для любой функции $g(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, $g(x,T) = 0$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T} \left(-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dxdt - \int_{S_T^2} [v(s,t) - \overline{v}(s,t)]g(s,t)dsdt = 0. \quad (21)$$

Поскольку при $v=\bar{v}(s,t)$ функция $p(x,t;\bar{v})$ является обобщенным решением задачи (18)-(20), то для любой функции $\eta(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,0)=0$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T}\left(-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)dxdt-\int_{S_T^1}[u(s,t;\bar{v})-a(s,t)]\eta(s,t)dsdt=0. \quad (22)$$

Если в формуле (21) за функцию $g(x,t)$ взять $p(x,t)$, а в формуле (22) за функцию $\eta(x,t)$ взять $\tilde{u}(x,t)$, из формулы (21) вычесть формулу (22) почленно, получим:

$$-\int_{S_T^2}[v(s,t)-\bar{v}(s,t)]p(s,t;\bar{v})dsdt+\int_{S_T^1}[u(s,t;\bar{v})-a(s,t)]\times$$
$$\times[u(s,t;v)-u(s,t;\bar{v})]dsdt=0. \quad (23)$$

Тогда из соотношений (17) и (23) следует, что

$$J'(\bar{v})(v-\bar{v})=\int_{S_T^2}p(s,t;\bar{v})[v(s,t)-\bar{v}(s,t)]dsdt=0,\ \forall v\in L_2(S_T^2). \quad (24)$$

В силу произвольности $v\in L_2(S_T^2)$, из (24) следует, что

$$p(s,t;\bar{v})=0 \text{ почти для всех } (s,t)\in S_T^2. \quad (25)$$

Поскольку множество $S_T^2\subset S_T$ является множеством единственности в задаче (18)-(20) (выше мы это предполагали), то из соотношения (18), из второго условия (20) и (25) следует, что $p(x,t;\bar{v})=0$ почти для всех $(x,t)\in Q_T$, поэтому из первого соотношения (20) следует, что

$$u(s,t;\bar{v})=a(s,t) \text{ почти для всех } (s,t)\in S_T^1,$$

т.е. $\bar{v}(s,t)$ такая функция из $L_2(S_T^2)$, что условие (4) выполняется и одновременно $J(\bar{v})=\inf\limits_{v\in L_2(S_T^2)}J(v)=0$.

Как видно из (24), градиент функционала $J(v)$ имеет вид

$$J'(v)=p(s,t;v). \quad (26)$$

Таким образом, для получения градиента функционала (5) в произвольной точке $v\in L_2(S_T^2)$ нужно последовательно решить две краевые задачи: сначала из (1)-(3) надо определить функцию $u(x,t;v)$, затем в (20) подставить полученную $u(s,t;v)$, из (18)-(20) найти $p(x,t;v)$, которая, согласно (26), является градиентом функционала (5).

Отметим, что для численного решения задачи (5), (1)-(3) может быть использован градиентный метод. Градиентный метод в рассматриваемой задаче с учетом формулы (26) сводится к построению последовательности $\{v^k(s,t)\}$ по правилу

$$v^{k+1}(s,t)=v^k(s,t)-\alpha_k p(s,t;v^k),\ k=0,1,...,$$

где $p(x,t;v^k)$ является решением задачи (18)-(20) при $v = v^k(s,t)$, а для нахождения $u(x,t;v^k)$, которое присутствует в условии (20), надо решить задачу (1)-(3) при $v = v^k(s,t)$, причем выбор параметра α_k можно проводить с помощью одного из способов, описанных в главе I, §4, п.1 из [10].

Замечание. Выше для простоты изложения и вычислений мы рассмотрели задачу (1)-(3). Можно было бы рассмотреть задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T,$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x),\ x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\bigg|_{S_T^1} = b(s,t)\ ,\ (s,t) \in S_T^1,\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\bigg|_{S_T^2} = v(s,t)\,,(s,t) \in S_T^2$$

и получить аналогичные результаты, где $f(x,t),\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x)$, $b(s,t)$ - заданные функции из $L_2(Q_T), W_2^1(\Omega), L_2(\Omega)$, $L_2(S_T^1)$ соответственно, а $v(s,t)$ - неизвестная функция из $L_2(S_T^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972, 164 с.
2. Кабанихин С.И., Искаков Т.К. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: Наука, 2001, 315 с.
3. Кожанов А.И., Валитов И.Р. О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами // Мат. заметки ЯГУ, 14 (2007), с.3-16.
4. Anikonov Yu. E. Selected Formulas of the Theory of Inverse Problems // Journal of Inverse and ILL – Posed Problems, 15 (2007), p.549-568.
5. Абашеева Н.Л. Линейная обратная задача для операторно-дифференциального уравнения с параметром // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики, 2007, с.5-14.
6. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. М.: Издательский центр, 2008, 345 с.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
8. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970, 336 с.
9. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 415 с.
10. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARI İLƏ TƏDQİQİ

S.M.ZEYNALLI

XÜLASƏ

Diferensial tənliklər üçün tərs məsələlər əlavə informasiyalar olduqda baxılan tənliklərin əmsallarının və ya sərhəd şərtlərinin əmsallarının tapılmasından ibarətdir. Belə məsələlər geofizika, seysmologiya, hidrodinamika və s. sahələrdə meydana çıxır, ona görə də belə məsələlərin tədqiqi müasir riyaziyyatın aktual məsələsidir.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, optimallıq şərti, qoşma məsələ, funksionalın qradiyenti.

INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR A SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION AND ITS INVESTIGATION BY OPTIMIZATION METHODS

S.M.ZEYNALLI

SUMMARY

Inverse problems for the differential equations consist of the search of the coefficients of the considered equations or boundary conditions under some additional conditions. Since such problems arise in geophysics, seismology, hydrodynamics etc. the investigation of these problems is an actual problem of the modern mathematics.

Key words: inverse boundary problem, optimality condition, adjoint problem, gradient of the functional.

Поступило в редакцию: 12.03.2014 г.
Подписано к печати: 04.04.2014 г.